الباب السادس

الانحناء . تحديد الاجهادات

٤٥ – معلومات عامة عن تشوهات الانحناء

غالبا ما تتعرض القضبان لتأثير الاحمال العرضية، او القوى المزدوجة الخارجية، التى يمر مستوى تأثيرها بمحور القضيب (الشكل ٦ – ١).

وهنا تظهر فى المقاطع العرضية للقضيب عزوم الحناية، اى العزوم الداخلية التى يكون مستوى تأثيرها عموديا على مستوى المقطع العرضى للقضيب.

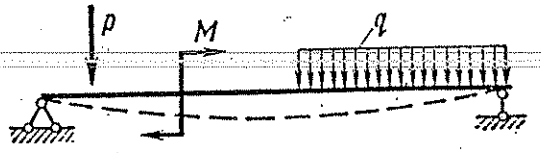
فعند تأثير مثل هذه الاحمال، ينحنى محور القضيب.

ويسمى هذا النوع من التحميل بالانحناء. ان القضبان التى تعمل بالاساس على الانحناء، يطلق عليها عادة اسم العتبات، ويسمى الانحناء خالصا، اذا كان عزم الحناية يعتبر القوة الداخلية الوحيدة فى مقطع القضيب.

ولكن غالبا ما تظهر فى المقاطع العرضية قوى عرضية، الى جانب عزوم الحناية. ويسمى الانحناء فى مثل هذه الحالة بالانحناء العرضى.

واذا كان مستوى تأثير عزم الحناية يمر باحد محاور القصور الذاتى الرئيسية المركزية لمقطع القضيب العرضى، فيسمى بالانحناء المستوى. اما فى الحالة المضادة فيسمى بالانحناء المائل.

وعند الانحناء المستوى يبقى محور العتبة فى مستوى القوى الخارجية.



الشكل ٦ – ١

حتى بعد التشوه — اى فى مستوى القوة. اما عند الانحناء المائل، فان مستوى التشوهات لا ينطبق على مستوى القوة.

ان الانحناء المستوى للقضبان الرقيقة الجدران فى حالة الحمل الذى يؤثر فى مستوى يمر بمحور القصور الذاتى الرئيسى الذى لا يعتبر محور تماثل لمقطع القضيب العرضى، يصبح معقدا نتيجة لتشوهات الالتواء (راجع البند ٥٤).

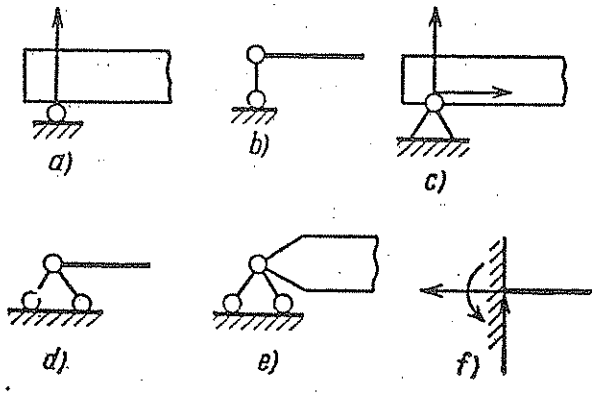
وسنبدأ دراسة تشوهات الانحناء بحالة الانحناء المستوى الخالص، وفى المستقبل سنبحث حالة اخرى للانحناء اكثر شيوعا — وهى الانحناء العرضى. اما الانحناء المائل، الذى يقترن بمقاومة معقدة للقضبان فسنبحثه فى الباب التاسع.

٤٦ — انواع مرتكزات العتبات

توجد ثلاثة انواع من مرتكزات العتبات التى تعتبر مجموعة مستوية، وهى:

١ — مرتكز مفصلى متحرك (الشكل ٦ — ٢، a). ان الارتكاز لا يمنع دوران نهاية العتبة، وكذلك ازاحتها باتجاه مستوى التدحرج. ويمكن ان يظهر فيها رد فعل واحد، ويكون عموديا على مستوى التدحرج ويمر بمركز الدحراج (الدلفين).

ويمثّل الارتكاز المتحرك تخطيطيا على شكل قضيب فى طرفيه مفصلان (الشكل ٦ — ٢، b).



الشكل ٦ — ٢

ان المرتكزات المتحركة تعطى العتبة امكانية تغيير طولها بسهولة عند اختلاف درجات الحرارة، وفى نفس الوقت التخلص من احتمال ظهور الاجهادات الحرارية.

٢ ــ مرتكز مفصلى ثابت (الشكل ٦ ــ ٢، c)، ان مثل هذا الارتكاز يسمح بدوران طرف العتبة، ولكنه يمنع ازاحتها الانتقالية الى اية جهة كانت ان رد الفعل الحاصل فيها يمكن تحليله الى مركبتين: افقية ورأسية. ان المرتكز المفصلى الثابت مبيّن تخطيطيا فى الشكلين ٦ ــ ٢، d و٦ ــ ٢، e. ويجب هنا ان يقع المرتكز المفصلى على مستوى محور العتبة. واذا لم ينفذ هذا الشرط فقد تقع بعض الاخطاء الكبيرة عند القيام بالحسابات. وهذا يتعلق بتمدد او تقلص الياف العتبة عند الانحناء، والمرتكز المفصلى الثابت يمنع التمدد والتقلص.

٣ ــ التثبيت الصلب (الجاسئ) او القمط. (الشكل ٦ ــ ٢، f). ان مثل هذا التثبيت (الربط) لا يسمح بالازاحة الخطية والزاويّة للمقطع فوق المرتكز، ويمكن لهذا المرتكز ان يحدث رد فعل يتحلل عادة الى مركبتين رأسية وافقية، وعزم قمط (عزم مفاعل).

وتسمى العتبة المثبتة من احد طرفيها بالعتبة الكابولية او كابول فقط.

واذا امكن الحصول على ردود فعل المرتكزات من معادلات الاستاتيكا وحدها، فتسمى عند ذاك عتبات محددة استاتيكيا. واذا كان عدد ردود فعل المرتكزات اكثر من عدد معادلات الاستاتيكا المتوفرة لهذه المسألة، فتسمى العتبات عندئذ بالعتبات غير المحددة استاتيكيا. ولتحديد ردود الفعل فى مثل هذه العتبات، يتطلب وضع معادلات اضافية ــ معادلات التشوهات (الازاحات).

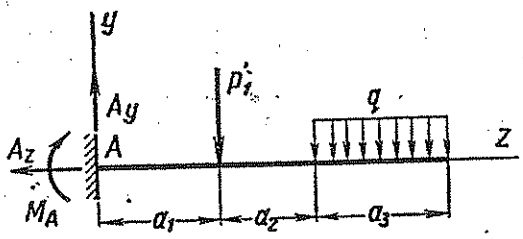
٤٧ ــ تحديد ردود فعل المرتكزات

لنبحث عدة امثلة.

مثال ٦ ــ ١. يراد تحديد ردود فعل مرتكزات العتبة الكابولية (الشكل ٦ ــ ٣).

الحل. نمثل رد الفعل فى الطرف المثبت بالقوتين A_z و A_y المتجهتين كما فى الرسم، وبعزم مفاعل M_A. نضع معادلات توازن العتبة:

١ — نساوى مجموع مساقط القوى التى تؤثر فى العتبة على المحور z للصفر، $\Sigma Z = 0$. نحصل على $A_z = 0$. وفى حالة انعدام الحمل الافقى، فان المركبة الافقية لرد الفعل تساوى صفرا.



الشكل ٦ — ٣

٢ — نعيد نفس الشىء ولكن على المحور y: $\Sigma Y = 0$. نستبدل الحمل q المنتظم التوزيع بالمحصلة qa_3 التى تؤثر فى وسط القسم a_3:

$$A_y - P_1 - qa_3 = 0$$

حيث:

$$A_y = P_1 + qa_3 .$$

المركبة الافقية لرد الفعل فى العتبة الكابولية، تساوى مجموع القوى التى تؤثر على العتبة.

٣ — نضع المعادلة الثالثة للتوازن: نجعل مجموع عزوم جميع القوى نسبة الى اية نقطة كانت، مثلا نسبة الى النقطة A مساويا للصفر:

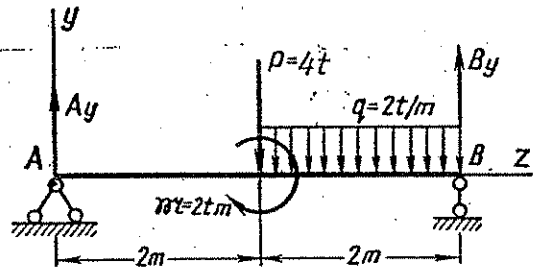
$$\Sigma M_A = 0; \quad -M_A - P_1 a_1 - qa_3\left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2}\right) = 0$$

ومنها:

$$M_A = -P_1 a_1 - qa_3\left(a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2}\right).$$

ان العلامة السالبة تبين ان اتجاه العزم المفاعل الذى اتخذناه فى البداية يجب ان يعكس. وهكذا، فان العزم المفاعل فى الطرف المثبت يساوى مجموع عزوم القوى الخارجية بالنسبة للطرف المثبت.

مثال ٦ — ٢. يراد تحديد ردود فعل مرتكزات عتبة مرتكزة على طرفيها (الشكل ٦ — ٤). وتسمى مثل هذه العتبات عادة بالعتبات البسيطة.



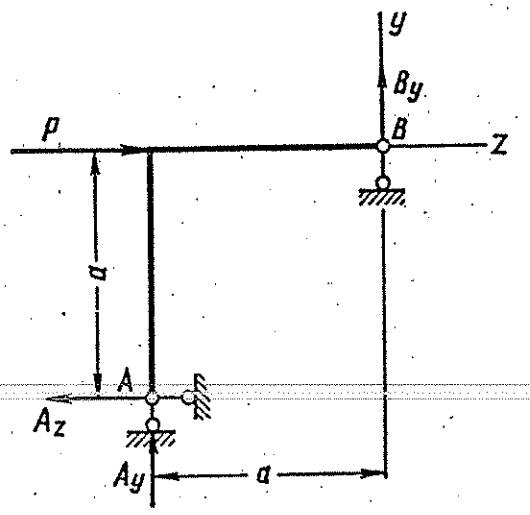
الشكل ٦ — ٤

الحل. بما ان الحمل الافقى غير موجود، فان $A_z = 0$.

$$(1)\ \Sigma M_B = 0; \quad -A_y \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0; \quad A_y = 2.5\ t$$
$$(2)\ \Sigma M_A = 0; \quad B_y \cdot 4 - 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 2 = 0; \quad B_y = 5.5\ t.$$

وبدلا من المعادلة الثانية، كان من الممكن استعمال الحالة $\Sigma Y = 0$ التى يتطلب استعمالها هنا لاجل التأكد من صحة الحل.

مثال ٦ — ٣: يراد تحديد ردود فعل المرتكزات لعتبة منكسرة المحيط (الشكل ٦ — ٥).



الشكل ٦ — ٥

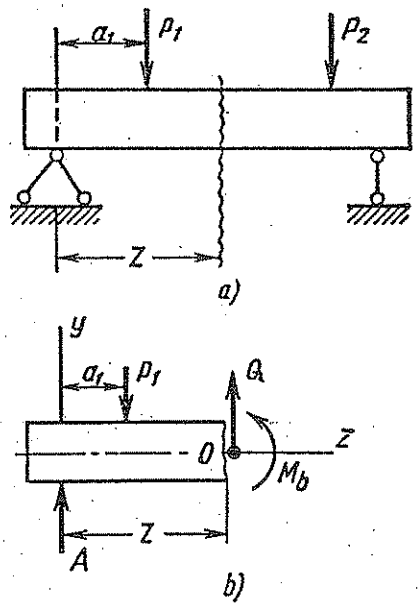
الحل:

$$(1)\ \Sigma M_A = 0;\quad -Pa + B_y a = 0;\quad B_y = P.$$
$$(2)\ \Sigma Z = 0;\quad -A_z + P = 0;\quad A_z = P.$$
$$(3)\ \Sigma Y = 0;\quad A_y + B_y = 0;\quad A_y = -B_y = -P$$

اى ان رد الفعل A_y لا يتجه الى الاعلى، وانما الى الاسفل، وللتأكد من صحة الحل، يمكن استعمال المعادلة $\Sigma M_B = 0$ على سبيل المثال.

٤٨ – تحديد القوى الداخلية عند الانحناء

كما ذكر سابقا، تظهر فى حالة الانحناء العرضى المستوى فى المقاطع العرضية للعتبة قوتان داخليتان (معاملات القوى الداخلية) – عزم الحناية M_b والقوة العرضية (قوى القص) Q. وتستعمل لتحديدها طريقة القطع. نتخيل قطعا للعتبة فى النقطة التى تهمنا، مثلا على مسافة z من المرتكز الايسر (الشكل ٦ – ٦، a). نهمل احد قسمى العتبة، مثلا الايمن ونبحث توازن القسم الايسر.



الشكل ٦ – ٦

نستبدل الفعل المتبادل لقسمى العتبة بقوى داخلية: عزم الحناية M_b والقوة العرضية (قوى القص) Q (الشكل ٦ – ٦، b).

ولتحديد المقدارين M_b و Q نستعمل معادلتين للتوازن:

$$(1)\ \Sigma Y = 0;\quad A - P_1 + Q = 0;\quad Q = P_1 - A;\quad Q = \Sigma (P_i)_y$$
$$(2)\ \Sigma M_0 = 0;\quad Az - P_1 (z - a_1) - M_b = 0;$$
$$M_b = Az - P_1 (z - a_1);\quad M_b = \Sigma m_0 (P_i).$$

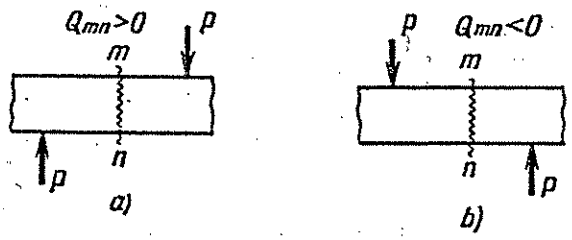
وهكذا:

١ ــ ان القوة العرضية (قوة القص) Q فى المقطع العرضى للعتبة تساوى عدديا المجموع الجبرى لمساقط جميع القوى الخارجية على مستوى المقطع والتى تؤثر على جهة واحدة من المقطع.

٢ ــ عزم الحناية فى المقطع العرضى للعتبة يساوى عدديا المجموع الجبرى لعزوم القوى الخارجية المحسوبة بالنسبة لمركز ثقل المقطع والتى تؤثر على جهة واحدة من المقطع.

٤٩ ــ قاعدة الاشارات لعزوم الحناية والقوى العرضية (قوى القص)

تعتبر القوة العرضية (قوى القص) فى مقطع العتبة مثلا فى المقطع mn (الشكل ٦ ــ ٧، a) موجبة، اذا كان اتجاه محصلة القوى الخارجية التى تقع على يسار المقطع من الاسفل الى الاعلى، والتى تقع على يمين المقطع من الاعلى الى الاسفل. وتعتبر سالبة اذا كان العكس (الشكل ٦ ــ ٧، b).

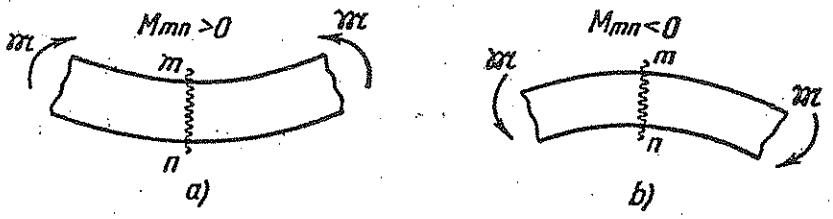


الشكل ٦ ــ ٧

ويعتبر عزم الحناية فى مقطع العتبة، مثلا فى المقطع mn (الشكل ٦ ــ ٨، a) موجبا، اذا كان اتجاه محصلة عزم القوى الخارجية التى تقع على يسار المقطع، باتجاه دوران عقرب الساعة والتى تقع على يمين المقطع، باتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة وتعتبر سالبة اذا كان العكس (الشكل ٦ ــ ٨، b). ان العزوم المبينة فى الشكل ٦ ــ ٨، a، تحنى العتبة بحيث يكون التحدب

الى اسفل، اما العزوم المبينة فى الشكل ٦ — ٨،b، فانها تحنى العتبة بحيث يكون التحدب الى اعلى. ويمكن التأكد من هذا بواسطة حني مسطرة رقيقة.

ومن هنا نستخلص قاعدة اخرى لاشارات عزم الحناية، يمكن تذكرها ببساطة. ويعتبر عزم الحناية موجبا، اذا كان مقطع العتبة المبحوث ينحنى



الشكل ٦ — ٨

بتقعر الى اسفل. ومن البديهى، فان الالياف التى تقع فى القسم المقعر تتعرض للانضغاط، اما الالياف التى تقع فى القسم المحدب فتتعرض للشد. وعلى هذا الاساس، فاذا اردنا تخطيط الاحداثيات الموجبة للرسم البيانى لـ M_b فى اعلى المحور، نجد ان الرسم البيانى يوجد فى جهة الالياف المضغوطة للعتبة.

٥٠ — العلاقة بين عزم الحناية والقوة العرضية (قوة القص) وشدة الحمل الموزع

من السهل وضع علاقة معينة بين عزم الحناية والقوة العرضية (قوة القص) وشدة الحمل الموزع.

لنبحث العتبة المحملة بحمل اختيارى (الشكل ٦ — ٩). نحدد القوة العرضية فى المقطع الذى يقع على المسافة z من المرتكز الايسر. وباسقاط القوى التى تقع يسار المقطع على الاحداثى الرأسى، نحصل على *:

$$Q_z = A - P_1 + qz. \qquad (أ)$$

*ان استعمالنا الرمز Q_z (وفيما بعد M_z) يؤكد، ان القوة العرضية وعزم الحناية، يعتبران دالتين للاحداثى السينى z لمقطع العتبة العرضى.

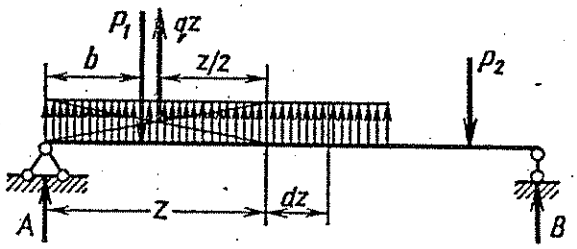
وبنفس الطريقة، نحسب القوة العرضية لمقطع عرضى مجاور يقع على المسافة $z+dz$ من المرتكز الايسر، فنحصل على:

$$Q_z + dQ_z = A - P_1 + q\,(z+dz) \qquad (ب)$$

بطرح (أ) من (ب)، نحصل على $dQ_z = qdz$ ، ومن هنا:

$$q = \frac{dQ_z}{dz} \qquad (٦-١)$$

اى ان مشتق القوة العرضية بالنسبة للاحداثى السينى لمقطع العتبة، يساوى شدة الحمل الموزع.



الشكل ٦ – ٩

نحسب الان عزم الحناية فى المقطع ذى الاحداثى السينى z، وذلك بجمع عزوم القوى التى تؤثر على القسم الايسر من المقطع. ويجب هنا استبدال الحمل الموزع على القسم الذى يبلغ طوله z بمحصلته التى تساوى qz ونؤثر بها فى وسط القسم، اى على مسافة $\frac{z}{2}$ من المقطع.

$$M_z = Az - P(z-b) + qz\,\frac{z}{2}. \qquad (جـ)$$

وبنفس الطريقة نحسب عزم الحناية فى المقطع المجاور الذى يقع على مسافة $z+dz$ من المرتكز الايسر:

$$M_z + dM_z = A(z+dz) - P_1(z_1 + dz - b) + \frac{q(z+dz)^2}{2}. \qquad (د)$$

وبطرح المعادلة (جـ) من المعادلة (د)، نحصل على مقدار زيادة عزم الحناية:

$$dM_z = Adz - Pdz + qzdz = dz\,(A - P_1 + qz).$$

ان الكمية الموجودة داخل الاقواس تمثل القوة العرضية Q_z، اذن:

$$dM_z = Q_z dz$$

ومن هنا:

$$Q_z = \frac{dM_z}{dz} \qquad (٦ - ٢)$$

اى ان مشتق عزم الحناية بالنسبة للاحداثى السينى لمقطع العتبة يساوى القوة العرضية (قوة القص)، «نظرية جورافكسى».

وبأخذ تفاضل كلا طرفى المعادلة (٦ — ٢)، نحصل على:

$$\frac{dQ_z}{dz} = \frac{d^2M_z}{dz^2} = q \qquad (٦ - ٣)$$

اى ان المشتق الثانى لعزم الحناية بالنسبة للاحداثى السينى لمقطع العتبة يساوى شدة الحمل الموزع.

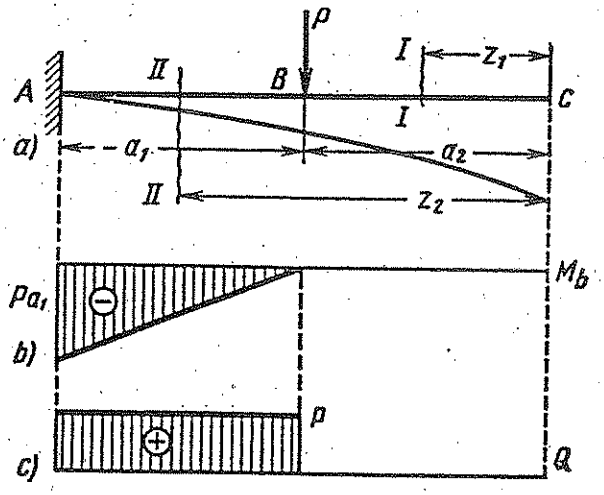
وسنستعمل فيما بعد، العلاقات التى حصلنا عليها وبصورة خاصة، عند تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الحناية والقوى العرضية (قوى القص).

٥١ — تخطيط الرسوم البيانية لعزوم الحناية والقوى العرضية (قوى القص)

ولاجل الايضاح البصرى لطبيعة تغير عزم الحناية والقوة العرضية على طول العتبة، ولاجل تعيين المقاطع الخطرة تخطط الرسوم البيانية لـ M_b و Q. ان عملية تخطيط هذه الرسوم البيانية موضحة فى الامثلة التالية:

مثال ٦ — ٤. يراد تخطيط الرسوم البيانية لـ M_b و Q للعتبة المبينة فى الشكل ٦ — ١٠.

الحل. نقطع فى الجهة اليمنى للقوة مقطعا على المسافة z_1 من الطرف الايمن للعتبة (المقطع I — I). ويمكن تحديد عزم الحناية فى هذا المقطع بطريقة



الشكل ٦ — ١٠

سهلة وهى جمع عزوم القوى الخارجية الواقعة على يمين المقطع. نحصل على $M_b = 0$. وهذا الجواب ينطبق على كافة مقاطع القسم BC .

ويحسب عزم الحناية فى اى مقطع كان (II — II) فى القسم AB كمجموع لعزوم جميع القوى التى تقع على يمين المقطع، ولا توجد عند ذاك حاجة لتحديد ردود فعل المرتكز فى الطرف المثبت، فنحصل على:

$$M_{z_2} = -P(z_2 - a_2); \quad (a_2 \leqslant z_2 \leqslant a_1 + a_2)$$

والعلامة السالبة تدل على ان العتبة تنحنى بتحدب الى اعلى. ونحصل على معادلة خط مستقيم مائل. ولتخطيط الرسم البيانى، نحسب قيمتين لـ M_z:

$$M_{z_2 = a_2} = 0; \quad M_{z_2 = a_1 + a_2} = -Pa_1$$

نضع المقدار Pa_1 حسب مقياس الرسم المستعمل، اسفل محور الرسم البيانى. ويبين الشكل ٦ — ١٠، b الرسم البيانى لـ M_b . ويكون عزم الحناية الاقصى فى المقطع قرب الطرف المثبت: $M_{\max} = -Pa_1$.

نحسب الان القوة العرضية فى المقطع I — I . وباسقاط القوى الواقعة فى الجهة اليمنى من المقطع على الاحداثى الرأسى، نحصل على $Q_{z_1} = 0$. وبنفس الطريقة للمقطع II — II ، نحصل على $Q_{z_2} = P$ ، وان العلامة الموجبة تبين، ان اتجاه القوة الخارجية التى تؤثر فى الجهة اليمنى من المقطع، هو من اعلى الى اسفل. ويبين الشكل ٦ — ١٠، c الرسم البيانى لـ Q .

ولتحديد اشارة القوة العرضية تقترح قاعدة اخرى، اضافة الى القاعدة المذكورة اعلاه، وهى: تعتبر القوة العرضية Q موجبة فى اقسام العتبة التى يكون فيها الرسم البيانى لـ M_b صاعدا (من اليسار الى اليمين)، وتعتبر سالبة فى تلك الاقسام التى يكون فيها الرسم البيانى لـ M_b هابطا.

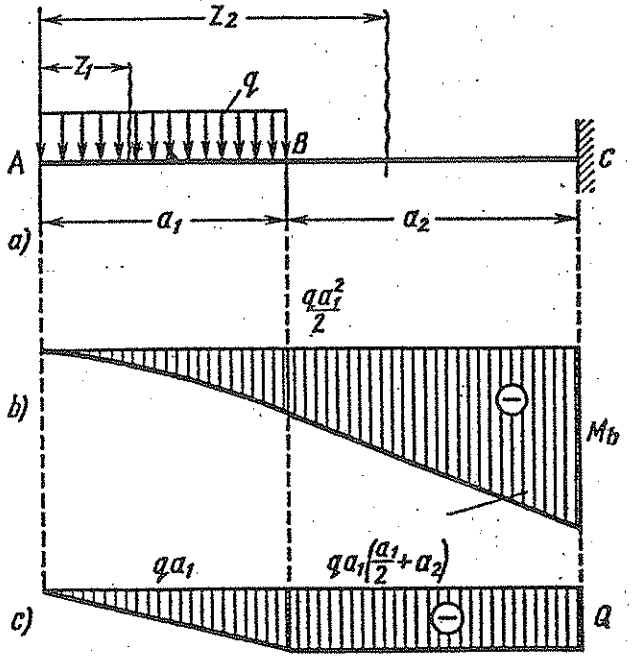
مثال ٦ — ٥. يراد تخطيط الرسم البيانى لـ M_b و Q لعتبة كابولية كما فى الشكل ٦ — ١١، a.

الحل: يوجد هنا قسمان (AB، BC)، يختلفان بطبيعة التحميل، وكذلك بقوانين تغير M_b و Q .

نحصل على عزم الحناية فى القسم AB لمقطع مأخوذ على مسافة z_1 من النقطة A، باعتباره عزم القوى الواقعة الى اليسار وكذلك يستبدل الحمل الموزع الذى يقع الى يسار المقطع بمحصلته qz_1 التى تؤثر فى وسط القسم الذى يبلغ طوله z_1 . فنحصل على:

$$M_{z_1} = -qz_1\frac{z_1}{2} = -\frac{qz_1^2}{2}.$$

وهنا تؤخذ الاشارة سالبة، لان العتبة تنحنى بتحدب الى اعلى.



الشكل ٦ – ١١

وهذه هى معادلة القطع المكافئ . نرسم تقريبيا قطعا مكافئا بثلاث نقاط:

$$M_{z_1=0} = 0; \quad M_{z_1=\frac{a_1}{2}} = -\frac{qa_1^2}{8}; \quad M_{z_1=a_1} = -\frac{qa_1^2}{2}.$$

نقطع فى القسم BC مقطعا على المسافة z_2 من طرف العتبة الحرة (غير المثبت). نستبدل الحمل المركز على الطول a_1 بمحصلته qa_1، التى تؤثر فى وسط القسم AB . والعزم فى المقطع z_2 يساوى:

$$M_{z_2} = -qa_1\left(z_2 - \frac{a_1}{2}\right)$$

وهى معادلة الخط المستقيم. نحسب M_{z_2} عند قيمتين لـ z_2: اى عندما تكون $z_2 = a_1$ و $z_2 = a_1 + a_2$، فنحصل عند ذاك على:

$$M_B = -\frac{qa_1^2}{2}$$

$$M_C = -qa_1\left(\frac{a_1}{2} + a_2\right).$$

ويبين الشكل ٦ — ١١، b، الرسم البيانى لـ M_b.

والقوة العرضية فى المقطع z_1، التى هى عبارة عن مجموع مساقط القوى على الاحداثى الرأسى التى تؤثر فى الجهة اليسرى، تساوى:

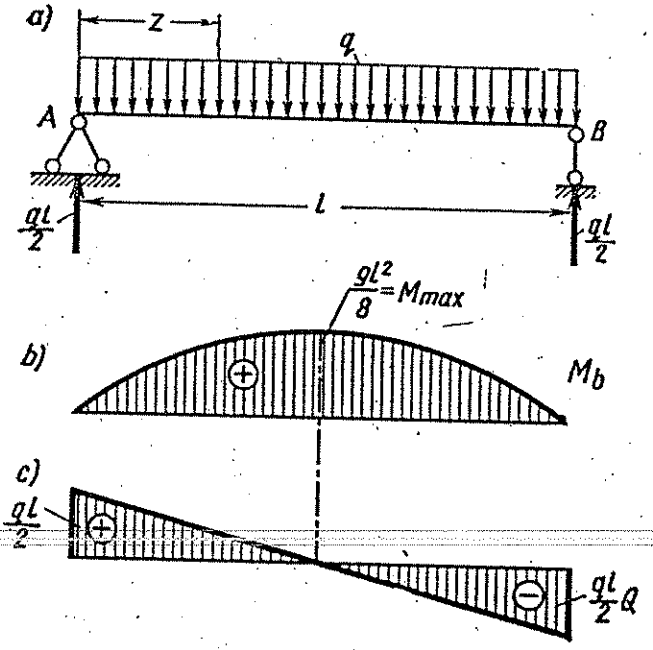
$$Q_{z_1} = -qz_1$$

ويمكن الحصول عليها ايضا، بواسطة الصيغة (٦ — ٢):

$$Q_{z_1} = \frac{dM_{z_1}}{dz_1} = -qz_1.$$

والقوة العرضية فى المقطع z_2 تساوى $Q_{z_2} = -qa_1$.

ويبين الشكل ٦ — ١١، c الرسم البيانى لـ Q.



الشكل ٦ — ١٢

وقد اخذت فى كلتا الحالتين علامة سالبة، لان الرسم البيانى لـ M_b هابط من اليسار الى اليمين. ويجب الانتباه ايضا الى العلاقة التالية المنبثقة من الصيغة (٦ — ٢): فى اقسام العتبة التى يتغير فيها عزم الحناية بطول القطع المكافئ (منحنى من الدرجة الثانية)، فان القوة العرضية تتغير حسب قانون خطى، اى ان الرسم البيانى — مستقيم مائل (خط من الدرجة الاولى). وعندما تتغير M_b حسب قانون خطى اى ان الرسم البيانى لـ M_b — خط مائل، فان القوة العرضية Q تكون ثابتة، والرسم البيانى — خط افقى (خط من درجة الصفر). وبصورة عامة، فان درجة (رتبة) الدالة التى تعبر عن قانون تغير Q اقل بواحد من درجة الدالة التى تعبر عن قانون تغير M_b. ويستنتج هذا مباشرة من الصيغة (٦ — ٢).

مثال ٦ — ٦. يراد تخطيط الرسم البيانى لـ M_b وQ، لعتبة ذات مرتكزين واقعة تحت تأثير حمل منتظم التوزيع (الشكل ٦ — ١٢).

الحل. نتيجة لتماثل تحميل العتبة، فان ردود الفعل متساوية فيما بينها:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

وعزم الحناية للمقطع ذى الاحداثى السينى z يساوى:

$$M_z = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}.$$

ويمثل الحد الاول من الصيغة عزم الحناية نتيجة لرد الفعل، وقد اخذ باشارة موجبة، وذلك لاننا اذا تخيلنا العتبة وهى مثبتة عند المقطع المبحوث، يمكن التأكد بانه نتيجة لتأثير رد الفعل، ينحنى قسم العتبة الذى يقع يسار المقطع، بتحدب الى اسفل. ويمثل الحد الثانى عزم الحناية، نتيجة الحمل المنتظم التوزيع، الذى يقع على الجهة اليسرى من المقطع. ومحصلة الحمل تساوى qz وتؤثر فى وسط القسم، اى على مسافة $\frac{z}{2}$ من المقطع. اذن فان عزم هذا الحمل يساوى $\frac{qz^2}{2}$ وعلامته سالبة، لان مثل هذا الحمل، يحنى العتبة (المثبتة خياليا فى المقطع) ويجعلها تتحدب الى اعلى. ان المعادلة التى حصلنا عليها

لعزم الحناية هى نفسها معادلة القطع المكافئ. ولنحسب الآن الاحداثيات الرأسية الثلاثة للرسم البيانى لـ M_b:

$$M_{z=0}=0;\quad M_{z=\frac{l}{2}}=\frac{ql^2}{8};\quad M_{z=l}=0.$$

وبواسطة هذه المعطيات نخطط الرسم البيانى لـ M_b. وعزم الحناية الاعظم (فى وسط العتبة) يساوى:

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}.$$

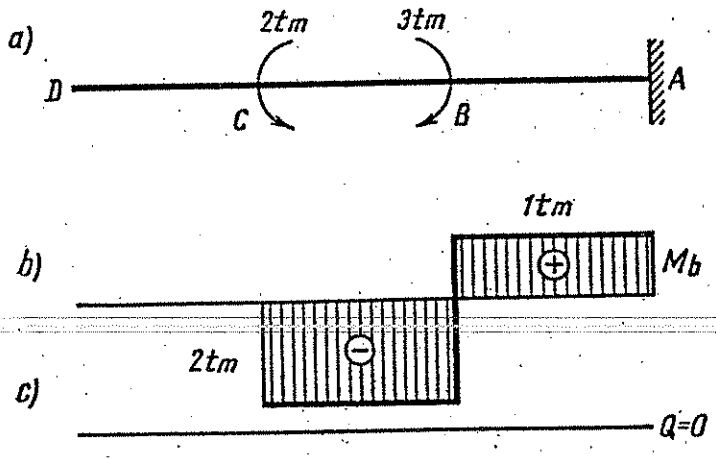
ومن المفيد حفظ هذه النتيجة، لانها غالبا ما تستعمل فى الحسابات. وبأخذ التفاضل M_z، ومساواة المشتقة الاولى للصفر، نتأكد من ان M_b الاعظم يكون مكانه بالحقيقة فى وسط العتبة.

والقوة العرضية فى المقطع z (وهى عبارة عن مجموع القوى الواقعة فى الجهة اليسرى) تساوى:

$$Q_z=\frac{ql}{2}-qz.$$

ونحصل على نفس النتيجة باستعمال الصيغة (٦ — ٢). لنحسب قيمتين لـ Q_z:

$$Q_{z=0}=\frac{ql}{2};\quad Q_{z=l}=-\frac{ql}{2}.$$



الشكل ٦ — ١٣

نخطط الرسم البيانى لـ Q. نلاحظ ان $Q=0$ فى وسط العتبة، اى حيث يوجد اعظم عزم للحناية، وهذا ما يستنتج من الصيغة (٦ — ٢).

مثال ٦ — ٧. يراد تخطيط الرسم البيانى لـ M_b و Q لعتبة كابولية (الشكل ٦ — ١٣).

الحل. عزم الحناية فى القسم DC (عبارة عن مجموع عزوم القوى الواقعة فى الجهة اليسرى): $M_z=0$.

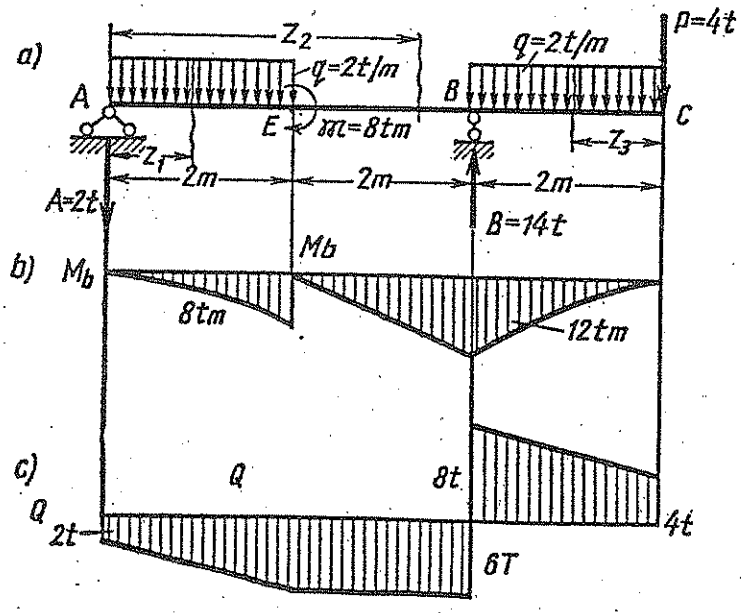
فى القسم CB لدينا $M_{z_0}=-2tm$ وفى القسم BA لدينا:

$$M_z=-2+3=1\ tm.$$

ان القوة العرضية (قوة القص) فى جميع المقاطع $Q=0$.

مثال ٦ — ٨. يراد تخطيط الرسم البيانى لـ M_b و Q للعتبة المبينة فى الشكل ٦ — ١٤.

نحدد ردود الفعل باستعمال معادلات التوازن. وردود الفعل هى: $A=2t$ متجه الى اسفل، $B=14t$ متجه الى اعلى.



الشكل ٦ — ١٤

ويحدد عزم الحناية فى المقطع ذى الاحداثى السينى z_1 ، على انه مجموع عزوم القوى الواقعة فى الجهة اليسرى:

$$M_{z_1} = -2z_1 - \frac{2z_1^2}{2}.$$

وهذه معادلة القطع المكافئ. نحسب ثلاث قيم لـ M_{z_1} :

$$M_{z_1=0} = 0; \quad M_{z_1=1\,m} = -3\,\text{tm}; \quad M_{z_1=2\,m} = -8\,\text{tm}.$$

وبواسطة هذه المعطيات نخطط الرسم البيانى لـ M_b فى القسم AE . ونحدد عزم الحناية فى المقطع ذى الاحداثى السينى z_2 :

$$M_{z_2} = -2z_2 - 4(z_2 - 1) + 8.$$

ان الحد الثانى من هذه المعادلة يمثل عزم الحناية لمحصلة الحمل الموزع، التى تؤثر على القسم AE. وهذه المحصلة تساوى $4t$ ، وتبعد عن المقطع المبحوث بمسافة قدرها $z_2 - 1m$. وبما ان لطول z_2 قيمتان: $z_2 = 2m$ و $z_2 = 4m$ ، لذلك نحصل على

$$M_{z_2=2} = 0; \quad M_{z_2=4} = -12\,\text{tm}.$$

وبواسطة هذه المعطيات نخطط الرسم البيانى لـ M_b فى القسم BE . نحدد عزم الحناية فى مقطع يقع على مسافة z_3 من النهاية اليمنى للعتبة. وبما ان القوى الخارجية التى تقع على يمين المقطع المذكور اقل مما هى عليه فى الجهة اليسرى، فمن الاسهل حساب M_{z_3} باعتبار انها مجموع عزوم القوى الواقعة فى الجهة اليمنى.

$$M_{z_3} = -4z_3 - 2\frac{z_3^2}{2}.$$

ويمثل الحد الاول عزم الحناية للقوة $P = 4t$ ، اما الحد الثانى فيمثل الحمل الموزع الذى يؤثر على يمين المقطع المبحوث.

لكلا الحدين اشارة سالبة، ذلك لاننا لو تخيلنا العتبة وقد ثبتت عند المقطع الذى حدد فيه M_b، فانها تنحنى بتحدب الى اعلى تحت تأثير الاحمال التى تؤثر على يمين المقطع.

وباعطاء القيم $z_3 = 0$ و $z_3 = 2m$ ، نحصل على الرسم البيانى لـ M_b للقسم BC .

نحدد القوة العرضية، اما باستعمال العلاقة $Q_z = \frac{dM_z}{dz}$ ، واما باسقاط القوى التى تؤثر فى القسم المقطوع على الخط العمودى. وللتأكد من صحة الحسابات، ينصح باستعمال كلا الطريقتين.

وبأخذ التفاضل M_{z_1}، نحصل على:

$$Q_{z_1} = \frac{d}{dz_1}\left(-2z_1 - \frac{2z_1^2}{3}\right) = -2 - 2z_1 .$$

وهذه معادلة الخط المستقيم. ونحصل على نفس النتيجة باسقاط القوى التى تؤثر فى يمين او يسار المقطع ذى الاحداثى السينى z_1 على الخط العمودى.

والقوة العرضية فى المقطع الاختيارى للقسم EB تساوى:

$$Q_{z_2} = \frac{dM_{z_2}}{dz_2} = -6 \text{ t}.$$

ان الرسم البيانى لـ Q فى القسم الثانى يكون على شكل خط افقى مستقيم.

وعند حساب Q_{z_3} باعتبارها مشتقة للعزم M_{z_3} ، يجب الاخذ فى الاعتبار ان المسافة z_3 تقاس من اليمين الى اليسار، فللحصول على الاشارة الصحيحة لـ Q، وكما هو معلوم من الرياضيات، يجب تغيير الاشارة بعد التفاضل:

$$Q_{z_3} = 4 + 2z_3$$

وبواسطة معادلة المستقيم هذه، يخطط الرسم البيانى لـ Q للقسم BC. ان نقط الانقطاع فى الرسم البيانى لـ Q تساوى بالمقدار، القوى المتركزة التى تؤثر على المقاطع المناظرة: ردود الفعل A و B ، وكذلك قوة P (فى النهاية اليمنى).

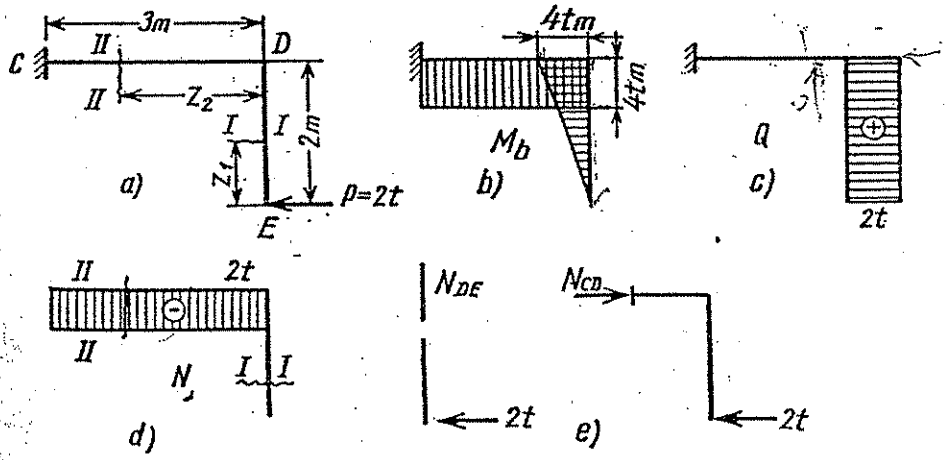
مثال ٦ — ٩. يراد تخطيط الرسم البيانى لـ M_b و Q والقوة الطولية N، للعتبة المتكسرة المرسومة فى الشكل ٦ — ١٥، a.

الحل. ان الطريقة العامة لتحديد M_b و Q و N فى اى مقطع تبقى كما هى. ولكن من الضرورى هنا، الاتفاق حول قاعدة تخطيط الرسوم البيانية للقضبان الرأسية والمائلة. وتستعمل عادة قاعدة عامة لكل القضبان وذلك بوضع

الرسم البيانى لـ M_b على الجهة المقعرة للقضيب. اى مراعاة نفس القاعدة المتخذة عند تخطيط الرسم البيانى للقضبان الافقية. ونحسب عزم الحناية فى المقطع I — I، باعتباره مجموعا لعزوم القوى الخارجية الواقعة فى جهة واحدة من المقطع (الى الاسفل)، ويساوي:

$$M_{z_1} = P_{z_1} .$$

واذا تخيلنا ان القسم السفلى للقضيب المقطوع مثبت عند المقطع I — I، فيظهر بديهيا ان الانحناء يكون محدبا الى اليمين، اى ان الليف المضغوط يكون فى اليسار. ولذا فاننا نخطط الرسم البيانى لـ M_{z_1} فى الجهة اليسرى (الشكل ٦ — ١٥، b) وعند $z_1 = 0$، $M_b = 0$، وعند $z_1 = 2m$، $M_b = 4tm$.



الشكل ٦ — ١٥

عزم الحناية فى المقطع II — II الذى هو عبارة عن مجموع عزوم القوى التى تقع الى يمين المقطع، يساوى حاصل ضرب القوة فى المسافة الممتدة حتى المقطع، اى فى طول القسم DE :

$$M_{z_2} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ tm} .$$

وتكون الالياف المضغوطة هنا فى الاسفل (انظر الشكل ٦ — ١٥، b).

ويمكن تحديد القوة العرضية باستعمال الصيغة (٦ — ٢):

$$Q_z = \frac{dM_z}{dz}$$

اى ان الكمية Q تحدد بمقدار ميلان المماس بالنسبة للرسم البيانى للعزوم. يكون عزم الحناية للقضيب CD ثابتا، اى $M = \text{const}$ ، اذن $Q = 0$، وللقضيب DE :

$$Q = \frac{4}{2} = 2t .$$

ويمكن طبعا، تحديد القوة العرضية، باعتبارها مجموعا لمساقط القوى المتجهة عموديا على محور القضيب، والتى تؤثر على جهة واحدة من المقطع.

وتثبت اشارة القوة العرضية (قوة القص) حسب القاعدة السابقة. تكون Q موجبة اذا كان الرسم البيانى لـ M صاعدا واذا نظرنا الى القضيب DE من اليسار الى اليمين. ونخطط الرسم البيانى لقيم Q الموجبة فى الجهة اليمنى (الشكل ٦ — ١٥، c).

ونحدد القوة الطولية N باستعمال طريقة القطع (الشكل ٦ — ١٥، d).

وبالنسبة للقضيب DE (الشكل ٦ — ١٥، e)، فباسقاط القوى التى تؤثر فى اسفل المقطع I — I، على اتجاه محور القضيب DE ، نحصل على $N_{DE} = 0$.

وبالنسبة للقضيب CD، فباسقاط القوى التى تؤثر فى يمين المقطع II — II ، على اتجاه محور القضيب CD، نحصل على $N_{CD} = -2t$ (انضغاط).

وتوضع القيمة السالبة لـ N فى اسفل محور القضيب، والاشارة السالبة تمثل الانضغاط (انظر الشكل ٦ — ١٥، d).

٥٢ — تحديد الاجهادات العمودية

تظهر فى المقاطع العرضية عند الانحناء الخالص والمستوى فقط عزوم الحناية التى تؤثر فى المستوى المار باحد المحاور المركزية الرئيسية للعتبة، وفى هذه الحالة خلال المحور y (الشكلان ٦ — ١٧ و ٦ — ١٨).

ويعتبر عزم الحناية، كعزم محصلة القوى العمودية الداخلية الموزعة على المقطع.